

限界費用、平均費用、平均可変費用★

生産量を $x \geq 0$ として、費用関数 $C(x) = x^2 + x + 4$ を考える。このとき、限界費用、平均費用、平均可変費用をそれぞれ求め、そのグラフの外形を図示しなさい。

限界費用曲線は費用関数 $C(x)$ の一階微分で求まる導関数であるから

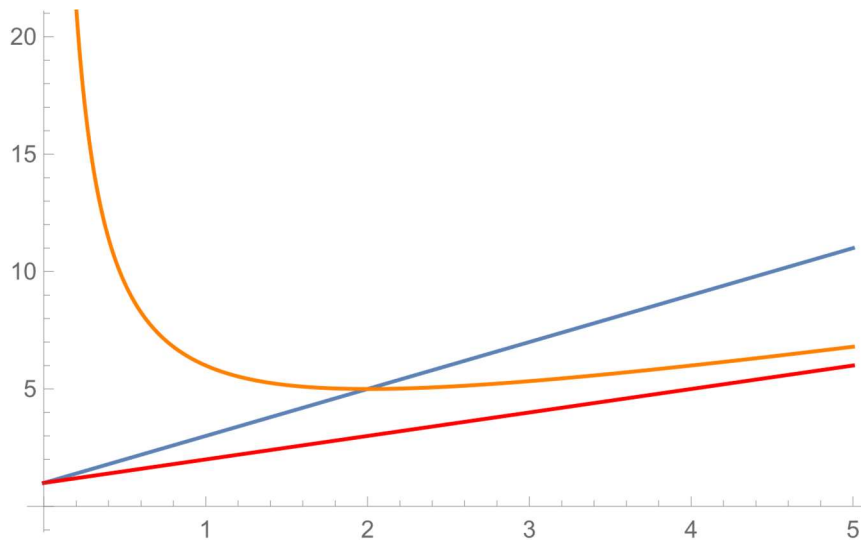
$$\frac{dC(x)}{dx} = 2x + 1$$

平均費用は費用関数 $C(x)$ を生産量 x で割った値であるから

$$\frac{C(x)}{x} = x + 1 + \frac{4}{x}$$

より平均可変費用は費用関数 $C(x)$ から固定費用 $C(0) = 4$ を引いた可変費用 $x^2 + x$ を生産量 x で割った値であるから

$$\frac{C(x) - C(0)}{x} = x + 1$$



費用関数★★

財 Y を生産するある企業の（短期の）生産関数を

$$y = z_1^{\frac{1}{4}} z_2^{\frac{1}{2}}$$

とする。 y は生産量、 z_1 と z_2 はそれぞれ生産要素1と2の投入量である。生産要素1と2の価格がそれぞれ1と2であるとする。さらに、固定費用を F とする。 F は正の定数である。この企業の費用最小化問題を解き、費用関数を求めなさい。ただし、固定費用を含めるのを忘れないこと。

等費用曲線は $C = z_1 + 2z_2 + F$ であるから

$$\frac{\partial C}{\partial z_1} = 1$$

$$\frac{\partial C}{\partial z_2} = 2$$

$$\frac{\frac{\partial C}{\partial z_1}}{\frac{\partial C}{\partial z_2}} = \frac{1}{2}$$

等量曲線は生産関数と同値であるから

$$\frac{\partial y}{\partial z_1} = \frac{z_2^{\frac{1}{2}}}{4z_1^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial z_2} = \frac{z_1^{\frac{1}{4}}}{2z_2^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial z_1}}{\frac{\partial y}{\partial z_2}} = \frac{z_2}{2z_1}$$

費用最小化で等量曲線と等費用曲線は接線の関係性にあるから

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial z_1}}{\frac{\partial y}{\partial z_2}} = \frac{\frac{\partial C}{\partial z_1}}{\frac{\partial C}{\partial z_2}}$$

$$z_1 = z_2 \leftrightarrow y(z_1) = z_1^{\frac{3}{4}} \leftrightarrow z_1(y) = y^{\frac{4}{3}}$$

費用関数は

$$C = z_1 + 2z_2 + F = 3z_1 + F = 3y^{\frac{4}{3}} + F$$

最小費用★★

ある企業の生産関数が、

$$y = 2L^{\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$

で与えられ (y は生産量、 L は労働投入量、 K は資本投入量を表す)、賃金率が2、資本賃貸率が8であるとする。企業が資本投入量を自由に調整できるとする。企業が最小の費用で20だけの財を生産するときの労働投入量と資本投入量を求めよ。また、そのときの最小費用も求めよ。

技術的限界代替率が

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{K^{\frac{1}{4}}}{2L^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{L^{\frac{1}{4}}}{2K^{\frac{3}{4}}}$$

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial K}} = \frac{K}{L}$$

であり生産要素価格比率と一致するから

$$\frac{K}{L} = \frac{1}{4}$$

$$L = 4K$$

$y=20$ のとき

$$K = 50$$

$$L = 200$$

最小費用は800

短期と長期の総費用関数★★

ある企業の生産関数が、

$$y = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$$

で与えられ (y は生産量、 L は労働、 K は資産を表す)、労働価格が 10、資本価格が 40 であるとする。このとき、この企業の短期と長期の総費用関数をそれぞれ求めよ。

まず資産 $K = \bar{K}$ (定数) として

$$C(L(y)) = 10 * L(y) + 40\bar{K}$$

であり、生産関数より

$$L(y) = \frac{y^3}{\bar{K}^2}$$

だから短期費用関数は

$$C(y) = C(L(y)) = \frac{10}{\bar{K}^2}y^3 + 40\bar{K}$$

長期において技術的限界代替率は

$$\frac{\partial y}{\partial L} = \frac{K^{\frac{2}{3}}}{3L^{\frac{2}{3}}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{2L^{\frac{1}{3}}}{3K^{\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial L}}{\frac{\partial y}{\partial K}} = \frac{K}{2L}$$

であり、生産要素価格比率と一致するから

$$\frac{K}{2L} = \frac{1}{4}$$

$$L = 2K \leftrightarrow y = 2^{\frac{1}{3}}K \leftrightarrow K = \frac{y}{2^{\frac{1}{3}}}$$

費用関数は

$$C = 60K = 30 * 2^{\frac{2}{3}} * y$$